

ANALIZA DOŚWIADCZEŃ DWUCZYNNIKOWYCH ZAKŁADANYCH W NIEKOMPLETNYM UKŁADZIE SPLIT-PLOT

IWONA MEJZA

Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych Akademii Rolniczej,
Wojska Polskiego 28, 60-769 Poznań

Streszczenie

W pracy przedstawiona została analiza doświadczeń dwuczynnikowych zakładanych w niekompletnym układzie split-plot, to znaczy takim, w którym liczba poletek dużych w obrębie bloku jest równa liczbie poziomów czynnika pierwszego, A, natomiast liczba poletek małych w obrębie każdego poletka dużego może być mniejsza lub równa liczbie poziomów czynnika drugiego, B.

Analiza układu obejmuje estymację liniowych funkcji parametrów kombinacji obiektowych, estymację komponentów wariancyjnych, testowanie hipotez ogólnych interesujących w tego typu układzie, testowanie hipotez szczegółowych określonych przez kontrasty oraz pewne uwagi dotyczące planowania doświadczeń zakładanych w niekompletnym układzie split-plot.

Dopuszczona w układzie niekompletność powoduje to, że nie można stosować tu tradycyjnej metody analizy wariancji. Wobec tego zaproponowano ogólną analizę opartą na cząstkowych analizach w tak zwanych warstwach. Warstwy te związane są ze zmiennością między poletkami małymi wewnątrz poletek dużych, między poletkami dużymi wewnątrz bloków oraz między blokami wewnątrz całego doświadczenia.

Rozważania teoretyczne zilustrowane są przykładem liczbowym z zakresu doświadczeń rolniczych.

1. WSTĘP

Jednym z częściej stosowanych w doświadczeniach rolniczych układów doświadczalnych jest układ o pojedynczo rozszczepionych jednostkach, zwany również układem split-plot (z języka angielskiego).

W układzie tym badamy wpływ dwóch czynników, powiedzmy A i B na wartości pewnej cechy. Założymy, że czynnik A występuje na S poziomach a B - na T poziomach. Rozważany układ stosujemy wtedy, gdy dysponujemy materiałem doświadczalnym o następującej strukturze: cały materiał podzielony jest na grupy zwane blokami, następnie każdy blok podzielony jest na S poletek dużych, dalej każde poletko duże jest podzielone na T

Słowa kluczowe: kontrasty kombinacji obiektowych, model liniowy, planowanie doświadczeń, układ split-plot, układ split-plot niekompletny.

poetek małych.

W układzie tym na poletkach dużych występują poziomy czynnika A (każdy z nich raz w obrębie bloku) a na poletkach małych - poziomy czynnika B (każdy z nich raz w obrębie poletka dużego).

Przyporządkowanie poetek dużych i małych poziomom obu czynników odbywa się zgodnie z następującą zasadą: poziomy czynnika A rozmieszczamy według schematu losowania obiektów w układzie bloków losowych, poziomy czynnika B także rozmieszczamy według powyższego schematu z tym, że rolę bloków pełnią tu poletka duże a rolę obiektów - poziomy czynnika B. Uzyskany w ten sposób układ nazywamy układem kompletnym split-plot. Układ ten stosuje się wtedy, gdy liczby poziomów obu czynników są niewielkie.

W praktyce jednak często występuje sytuacja taka, że ze względu na dostępny (ograniczony) materiał doświadczalny nie można doświadczenia założyć w układzie kompletnym. Wtedy jako układ doświadczenia wybieramy układ niekompletny.

W pracy tej rozważamy tylko taką sytuację, gdy nie wszystkie poziomy czynnika B występują na poletkach małych w obrębie każdego poletka dużego. Dokładniej, przyjmujemy, że każde poletko duże zawiera k poetek małych, na których wystąpić może co najwyżej k spośród T poziomów czynnika B. Natomiast na poletkach dużych (w obrębie każdego bloku) występują zawsze wszystkie poziomy czynnika A.

Pewne typy niekompletnego układu split-plot można spotkać w literaturze. Robinson (1967) podał analizę modelu liniowego dla niekompletnego układu split-plot, w którym poziomy czynnika A występują w układzie całkowicie losowym, a poziomy czynnika B - w układzie zrównoważonym o blokach niekompletnych, w którym rolę bloków pełnią poletka duże. Mejza I. i Mejza S. (1981, 1984) uogólnili wyniki Robinsona na przypadek, w którym poziomy czynnika A występują w układzie całkowicie losowym, natomiast poziomy czynnika B - w dowolnym układzie o blokach niekompletnych. Mejza I. (1981) podała program wraz z metodą analizy danych pochodzących z niekompletnego układu split-plot, gdzie tym razem niekompletność dotyczyła jedynie poziomów czynnika A.

W powyższych pracach model liniowy obserwacji różni się od modelu przyjętego w tej pracy strukturą macierzy kowariancji.

Zagadnienia dotyczące omawianego w tej pracy układu obejmują rozważania związane z modelem liniowym obserwacji, estymacją parametrów modelu, analizą wariancji, pewne sugestie dotyczące planowania doświadczeń zakładanych w układzie niekompletnym split-plot oraz przykład liczbowy ilustrujący te zagadnienia.

2. MODEL LINIOWY OBSERWACJI

Analiza statystyczna danych doświadczalnych jest w dużym stopniu uzależniona od modelu opisującego te dane. W literaturze spotyka się dwa podejścia prowadzące do uzyskania modelu. Pierwsze z nich polega na

przyjęciu a priori modelu i ewentualnie dalszej jego modyfikacji. Przy takim podejściu założenia modelu oparte są na pewnej intuicji (wiedzy) badacza o strukturze materiału doświadczalnego i strukturze składników modelu. Często też adaptuje się znane i dla podobnych sytuacji już wcześniej opracowane modele.

Sposób drugi polega na wprowadzeniu modelu dla każdego konkretnego doświadczenia (tzw. modelowanie analizy). W modelowaniu tym podstawową rolę odgrywają struktura materiału doświadczalnego i randomizacja jednostek tzn. sposób przyporządkowania jednostkom doświadczalnym obiektów (poziomów czynników). Na ogół konieczne jest także i w tym wypadku przyjęcie pewnych założeń w modelu (np. o addytywności jednostek doświadczalnych i obiektów).

W pracy tej model liniowy obserwacji uzyskany jest sposobem drugim. Budowanie takiego modelu obserwacji dla układu split-plot zostało przedstawione w pracach Mejzy I. (1984, 1985).

Problem, które z dwóch podejść prowadzących do uzyskania modelu jest bardziej prawidłowe pozostaje, jak się wydaje, nie rozstrzygnięty do końca. Nie jest również to celem tej pracy. Losowy charakter składników modelu (wynik randomizacji) powoduje ich niezależność od czynników losowych (np. środowiska). Błąd techniczny pojawiający się w tym modelu jest związany jedynie z pomiarem badanej cechy.

W doświadczeniach zakładanych w układzie split-plot, na materiale doświadczalnym o strukturze opisanej wcześniej, wykonujemy trzy-stopniowe losowanie (randomizację), tzn. losowanie bloków, poletek dużych i poletek małych.

Rozważany w pracy układ jest układem niekompletnym ze względu na rozmieszczenie poziomów czynnika B. Fakt ten powoduje to, że przed losowaniem należy rozstrzygnąć (zaplanować) jakie poziomy czynnika B wystąpią na poletkach małych wewnątrz poletek dużych. Można tego dokonać za pomocą przyjętego z góry przez eksperymentatora planu teoretycznego D. Plan ten może uwzględniać również sugestie badacza dotyczące precyzji porównań poziomów tego czynnika. Wybór planu będzie szerzej opisany w paragrafie 7.

Żałujemy, że dokonaliśmy wyboru planu D. Obecnie zajmujemy się sposobem odwzorowania tego planu na materiał doświadczalny. Odwzorowanie to określone jest przez pewien schemat (randomizacyjny) poniższej postaci. W pierwszym etapie losowo przyporządkowujemy bloki materiału doświadczalnego blokom teoretycznym planu D. W drugim etapie losowo przyporządkowujemy poletka duże materiału doświadczalnego poletkom dużym planu D (łącznie z numerami poziomów czynnika A). W etapie trzecim losowo przyporządkowujemy poletkom małym materiału doświadczalnego poletka małe planu D (łącznie z numerami poziomów czynnika B).

W pracy zakładamy, że plon obserwowany jest sumą trzech składników: plonu zerowego związanego z jednostką doświadczalną, efektu działania kombinacji obiektowej oraz błędu technicznego związanego z pomiarami cechy

(np. plonu). Ostatecznie, w wyniku przeprowadzonej randomizacji oraz powyższego założenia uzyskujemy model liniowy postaci

$$y = \mu' \mathbf{1}_n + \mathbf{D}'\rho + \mathbf{A}'\mathbf{r} + \mathbf{G}'\eta + \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{e} \quad (2.1)$$

gdzie \mathbf{y} jest $n(=bSk)$ -wymiarowym wektorem obserwacji uporządkowanych leksykograficznie (blok - poletko duże - poletko małe), μ jest średnią ogólną, $\mathbf{1}_n$ oznacza n -wymiarowy wektor jedynek, \mathbf{A}' oznacza $n \times v$ -wymiarową macierz układu dla kombinacji obiektowych, przy czym $v = ST$, \mathbf{r} - jest v -wymiarowym wektorem efektów kombinacji obiektowych τ_{hj}^* zapisanych w postaci

$$\tau_i = \tau_{hj}^* = \alpha_h + \beta_j + (\alpha\beta)_{hj} \quad ,$$

gdzie $i = (h-1)T+j$, $h = 1, 2, \dots, S$, $j = 1, 2, \dots, T$. \mathbf{D}' jest $n \times b$ -wymiarową macierzą układu dla bloków postaci $\mathbf{D}' = \mathbf{I}_b \otimes \mathbf{1}_S \otimes \mathbf{1}_k$, \mathbf{I}_b oznacza macierz jednostkową stopnia b , \otimes oznacza iloczyn Kroneckera macierzy, ρ jest b -wymiarowym wektorem efektów blokowych, \mathbf{G}' jest $n \times bS$ -wymiarową macierzą układu dla poletek dużych postaci $\mathbf{G}' = \mathbf{I}_b \otimes \mathbf{I}_S \otimes \mathbf{1}_k$, η jest bS -wymiarowym wektorem błędów poletek dużych, $\boldsymbol{\varepsilon}$ jest n -wymiarowym wektorem błędów poletek małych, \mathbf{e} jest n -wymiarowym wektorem błędów losowych związanych z pomiarami (tak zwanych błędów technicznych).

Struktura kowariancyjna modelu (2.1) przy dodatkowym założeniu, że jego składniki losowe podlegają rozkładowi normalnemu jest postaci

$$\rho \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{V}_\rho) \quad \text{gdzie} \quad \mathbf{V}_\rho = \sigma_\rho^2 (\mathbf{I}_b - b^{-1} \mathbf{J}_b) \quad ,$$

$$\eta \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{V}_\eta) \quad \text{gdzie} \quad \mathbf{V}_\eta = \sigma_\eta^2 \mathbf{I}_b \otimes (\mathbf{I}_S - S^{-1} \mathbf{J}_S) \quad ,$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{V}_\varepsilon) \quad \text{gdzie} \quad \mathbf{V}_\varepsilon = \sigma_\varepsilon^2 \mathbf{I}_{bS} \otimes (\mathbf{I}_k - k^{-1} \mathbf{J}_k) \quad ,$$

$$\mathbf{e} \sim N(\mathbf{0}, \sigma_e^2 \mathbf{I}_n)$$

oraz

$$E(\rho \eta') = \mathbf{0}, \quad E(\rho \boldsymbol{\varepsilon}') = E(\rho \mathbf{e}') = \mathbf{0},$$

$$E(\eta \boldsymbol{\varepsilon}') = E(\eta \mathbf{e}') = \mathbf{0}, \quad E(\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{e}') = \mathbf{0},$$

gdzie σ_ρ^2 , σ_η^2 , σ_ε^2 i σ_e^2 są wariancjami odpowiednio bloków, poletek dużych, poletek małych i błędów technicznych, a $\mathbf{J}_n = \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n'$. Stąd

$$\text{Cov}(\mathbf{y}) = \mathbf{V} = \mathbf{D}'\mathbf{V}_\rho\mathbf{D} + \mathbf{G}'\mathbf{V}_\eta\mathbf{G} + \mathbf{V}_\varepsilon + \sigma_e^2 \mathbf{I}_n \quad (2.2)$$

3. ESTYMACJA PARAMETRÓW - ZAGADNIENIA OGÓLNE

W analizie modelu (2.1), jako modelu plonu obserwowanego, jesteśmy przede wszystkim zainteresowani estymacją efektów stałych modelu (i ich funkcji) tzn. efektów kombinacji obiektowych (i ich funkcji). Sposób estymacji tych efektów zależy od tego czy komponenty wariancyjne σ_ρ^2 , σ_η^2 ,

σ_c^2 i σ_e^2 są znane czy też nie. W praktyce prawie zawsze wariancje te nie są znane i taki też przypadek będzie rozważany w tej pracy.

Jednak, aby poznać dokładniej strukturę estymatorów założmy, że wariancje efektów losowych są znane. Wtedy postać estymatorów najlepszych (tzn. otrzymanych przy znanych wariancjach) zasugeruje postać estymatorów i sposób estymacji, gdy wariancje te nie są znane.

Analizę danych przy modelu (2.1) przeprowadzić można wieloma sposobami. W pracy zaprezentujemy jeden z nich. Sposób ten polega na rozbiciu przestrzeni n -wymiarowej na pewne podprzestrzenie ortogonalne, zwane warstwami lub źródłami informacji. Liczba tych warstw oraz sposób rozbicia przestrzeni n -wymiarowej zależy od samego eksperymentu a dokładniej od struktury macierzy kowariancji (2.2). Doświadczenia tego typu noszą nazwę doświadczeń wielowarstwowych (por. Nelder, 1965, Bailey, 1981, Houtman i Speed, 1983).

W analizie danych pochodzących z doświadczeń wielowarstwowych wykorzystuje się pewne macierze ortogonalne, które dla rozważanego układu są postaci

$$\begin{aligned} P_0 &= n^{-1}J_n, & P_1 &= (Sk)^{-1}D'D - n^{-1}J_n, \\ P_2 &= k^{-1}G'G - (Sk)^{-1}D'D, & P_3 &= I_n - k^{-1}G'G. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Macierze te posiadają następujące własności:

$$\begin{aligned} P_t P_{t'} &= 0, \quad t \neq t', & P_t P_t &= P_t, \quad t=0,1,2,3, & \sum_{t=0}^3 P_t &= I_n, & P_0 \mathbf{1}_n &= \mathbf{1}_n, \\ P_1 \mathbf{1}_n &= P_2 \mathbf{1}_n = P_3 \mathbf{1}_n &= 0, \end{aligned}$$

$$r(P_0) = 1, \quad r(P_1) = b-1, \quad r(P_2) = b(S-1), \quad r(P_3) = bS(k-1).$$

Korzystając z (3.1) macierz V postaci (2.2) zapisujemy jako

$$V = \gamma_0 P_0 + \gamma_1 P_1 + \gamma_2 P_2 + \gamma_3 P_3, \quad (3.2)$$

gdzie $\gamma_0 = \sigma_e^2$, $\gamma_1 = Sk\sigma_\rho^2 + \sigma_e^2$, $\gamma_2 = k\sigma_\eta^2 + \sigma_e^2$, $\gamma_3 = \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_e^2$.

Zauważmy jeszcze, że

$$V P_t = \gamma_t P_t, \quad t=0,1,2,3$$

oraz

$$V^{-1} = \gamma_0^{-1} P_0 + \gamma_1^{-1} P_1 + \gamma_2^{-1} P_2 + \gamma_3^{-1} P_3 \quad (3.3)$$

W przypadku kiedy komponenty wariancyjne γ_t , $t=0,1,2,3$, są znane, estymację efektów kombinacji obiektowych można przeprowadzić za pomocą uogólnionej metody najmniejszych kwadratów, z której uzyskujemy układ równań normalnych

$$C r^0 = Q, \quad (3.4)$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 C &= \gamma_1^{-1} C_1 + \gamma_2^{-1} C_2 + \gamma_3^{-1} C_3, & C_t &= \Delta P_t A', \\
 Q &= \gamma_1^{-1} Q_1 + \gamma_2^{-1} Q_2 + \gamma_3^{-1} Q_3, & Q_t &= \Delta P_t y, \\
 & & t &= 1, 2, 3.
 \end{aligned}$$

Macierz C jest sumą ważoną macierzy C_1, C_2, C_3 związanych z warstwami. Podobna własność zachodzi dla wektora Q . Wykorzystamy to w analizie danych w przypadku kiedy komponenty wariancyjne nie są znane.

4. ESTYMACJA PARAMETRÓW W WARSTWACH

Podstawą analizy w t -tej warstwie (niezależnie od tego czy komponenty są znane czy nie) jest model liniowy postaci

$$y_t = P_t y, \quad \text{Cov}(y_t) = \gamma_t P_t, \quad t = 1, 2, 3. \quad (4.1)$$

Układ równań normalnych dla estymacji (najlepszej) efektów kombinacji obiektowych (i ich funkcji) w t -tej warstwie jest postaci (por. Rao i Mitra, 1971).

$$C_t r_t^0 = Q_t, \quad t = 1, 2, 3. \quad (4.2)$$

Stąd uzyskujemy rozwiązanie $r_t^0 = C_t^{-1} Q_t$, gdzie C_t^{-1} jest dowolną uogólnioną macierzą odwrotną do C_t . Rozwiązanie to wykorzystamy do wyznaczenia estymatorów funkcji liniowych estymowalnych w modelach warstwowych (4.1) oraz w modelu ogólnym (2.1).

Rozważmy dowolną funkcję liniową efektów kombinacji obiektowych $c'r$. Z faktu, że $C 1_v = 0, C_t 1_v = 0, t = 1, 2, 3$ wynika, że jeśli funkcja $c'r$ jest estymowalna to jest ona kontrastem, tzn. $c'1 = 0$. Jednakże w warstwach nie wszystkie kontrasty są estymowalne. Estymowalność kontrastu $c'r$ w t -tej warstwie sprawdzamy za pomocą warunku (Rao i Mitra, 1971)

$$c' C_t^{-1} C_t = c', \quad t = 1, 2, 3. \quad (4.3)$$

W przypadku odpowiedzi pozytywnej, najlepszy liniowy estymator nieobciążony kontrastu $c'r$ w t -tej warstwie uzyskujemy ze wzoru $\hat{c}'r_t = c'r_t^0$, a jego wariancja jest równa $\text{Var}(\hat{c}'r_t) = \gamma_t c' C_t^{-1} c, t = 1, 2, 3$.

Można wykazać (Bailey, 1981), że jeśli kontrast $c'r$ jest estymowalny jedynie w jednej z warstw, wtedy najlepszy estymator warstwowy kontrastu jest jednocześnie estymatorem najlepszym w modelu (2.1).

Oprócz estymatorów efektów stałych modelu zainteresowani jesteśmy także estymatorami komponentów wariancyjnych $\gamma_t, t = 1, 2, 3$. Nieobciążone estymatory tych komponentów są postaci

$$\hat{\gamma}_t = \text{SSE}_t / \nu_{ET}, \quad (4.4)$$

gdzie $\text{SSE}_t = y_t' [P_t - P_t A' C_t^{-1} \Delta P_t] y_t$, jest resztową sumą kwadratów w t -tej warstwie, a $\nu_{ET} = r(P_t) - r(C_t)$ jest liczbą stopni swobody.

Sumę SSE_t możemy zapisać jako $SSE_t = \mathbf{y}'_t \mathbf{P}_t \mathbf{y}_t - \mathbf{Q}'_t \mathbf{C}_t \bar{\mathbf{Q}}_t = SSY_t - SST_t$, gdzie sumę $SSY_t = \mathbf{y}'_t \mathbf{P}_t \mathbf{y}_t$ nazywamy sumą kwadratów dla całości, a sumę $SST_t = \mathbf{Q}'_t \mathbf{C}_t \bar{\mathbf{Q}}_t$ sumą kwadratów dla obiektów w t-tej warstwie, $t = 1, 2, 3$.

5. KONTRASTY BAZOWE

W analizie danych opisanych modelem (2.1) przydatne są pewne macierze, których wartości własne i wektory własne związane są bezpośrednio z własnościami układu.

Niech

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= \mathbf{I}_v - n^{-1} \mathbf{r}^{-\frac{1}{2} \delta} \mathbf{r} \mathbf{r}' \mathbf{r}^{-\frac{1}{2} \delta} \\ \mathbf{F}_2 &= \mathbf{I}_v - (\mathbf{S}\mathbf{K})^{-1} \mathbf{r}^{-\frac{1}{2} \delta} \mathbf{N}_1 \mathbf{N}'_1 \mathbf{r}^{-\frac{1}{2} \delta} \\ \mathbf{F}_3 &= \mathbf{I}_v - \mathbf{k}^{-1} \mathbf{r}^{-\frac{1}{2} \delta} \mathbf{N}_2 \mathbf{N}'_2 \mathbf{r}^{-\frac{1}{2} \delta} \end{aligned} \quad (5.1)$$

gdzie $\mathbf{N}_1 = \mathbf{A}\mathbf{D}'$, $\mathbf{N}_2 = \mathbf{A}\mathbf{G}'$ są macierzami incydencji odpowiednio względem bloków i poletek dużych. Zapis \mathbf{r}^{δ} oznacza macierz diagonalną, której elementami diagonalnymi są składowe wektora \mathbf{r} podniesione do potęgi x .

Macierze $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3$ są symetryczne, nieujemne określone i takie, że ich wartości własne należą do przedziału $\langle 0, 1 \rangle$. Ponadto macierze te posiadają jeden wspólny wektor własny, $\mathbf{p}_v = (1/\sqrt{n}) \mathbf{r}^{-(1/2)\delta} \mathbf{1}_v$, odpowiadający wartości własnej równej zero. W pracy tej zakładamy, że macierze $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3$ posiadają wszystkie wspólne wektory własne. Warunek ten jest spełniony wtedy gdy zachodzą równości $\mathbf{F}_t \mathbf{F}_{t'} = \mathbf{F}_{t'} \mathbf{F}_t$ dla $t, t' = 1, 2, 3$, $t \neq t'$. Faktycznie, wystarczy jedynie sprawdzić równość $\mathbf{F}_2 \mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_3 \mathbf{F}_2$, jako że pozostałe równości są zawsze prawdziwe.

Niech $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_v$ będą wspólnymi ortonormalnymi wektorami własnymi macierzy \mathbf{F}_2 i \mathbf{F}_3 . Dalej niech ω_i i λ_i oznaczają wartości własne odpowiednio macierzy \mathbf{F}_2 i \mathbf{F}_3 odpowiadające wektorom własnym \mathbf{p}_i . Można wykazać, że $\omega_i \geq \lambda_i$, $i = 1, 2, \dots, v$. Dalej zakładamy, że

$$r(\mathbf{F}_2) = v-1, \quad r(\mathbf{F}_3) = S(T-1)$$

Z rozważań poprzedniego paragrafu wiadomo, że w modelu (2.1) oraz w modelach warstwowych (4.1) estymowalne są jedynie kontrasty kombinacji obiektowych. Wobec tego wprowadźmy układ wektorów wyznaczających te kontrasty. Niech $\mathbf{c}_i = \mathbf{r}^{(1/2)\delta} \mathbf{p}_i$, $i = 1, 2, \dots, v$. Wektory \mathbf{c}_i są $\mathbf{r}^{-\delta}$ ortonormalne parami, tzn.

$$\mathbf{c}'_i \mathbf{r}^{-\delta} \mathbf{c}_{i'} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } i=i' \\ 0, & \text{gdy } i \neq i' \end{cases}$$

Estymowalność kontrastu $\mathbf{c}'_i \mathbf{r}^{-\delta}$ (dalej zwanego kontrastem bazowym) w t-tej warstwie ($t=1, 2, 3$) sprawdzamy za pomocą warunku (4.3).

Zauważmy, że

$$C_1 = r^{\frac{1}{2}\delta} (F_1 - F_2) r^{\frac{1}{2}\delta}, \quad C_2 = r^{\frac{1}{2}\delta} (F_2 - F_3) r^{\frac{1}{2}\delta}, \quad C_3 = r^{\frac{1}{2}\delta} F_3 r^{\frac{1}{2}\delta}. \quad (5.2)$$

Niech

$$\varepsilon_{it} = \begin{cases} 1 - \omega_i & \text{gdy } t=1, \\ \omega_i - \lambda_i & \text{gdy } t=2, \\ \lambda_i & \text{gdy } t=3. \end{cases} \quad (5.3)$$

Można udowodnić (Mejza I., 1984) twierdzenie orzekające, że

- kontrast $c_i'r$ jest estymowalny w t -tej warstwie, jeśli $\varepsilon_{it} > 0$,
- najlepszy estymator liniowy estymowalnego kontrastu $c_i'r$ w t -tej warstwie jest postaci

$$c_i'r_t = \varepsilon_{it}^{-1} c_i'r^{-\delta} Q_t, \quad (5.4)$$

- estymator (5.4) podlega rozkładowi normalnemu o parametrach

$$E(c_i'r_t) = c_i'r \quad \text{i} \quad \text{Var}(c_i'r_t) = \varepsilon_{it}^{-1} \gamma_t, \quad t=1,2,3.$$

W rozważanym układzie kontrasty dotyczące czynnika poziomów A są estymowalne tylko w warstwie drugiej, natomiast kontrasty dotyczące poziomów czynnika B i kontrasty interakcji AxB mogą być estymowalne w jednej, w dwóch bądź we wszystkich trzech warstwach.

Wiadomo, że jeżeli kontrast $c'r$ jest estymowalny jedynie w jednej z warstw, wtedy najlepszy estymator warstwowy tego kontrastu jest jednocześnie estymatorem najlepszym w modelu (2.1). Stąd wynika, że należy tak zaplanować doświadczenie, aby cała informacja o kontrastach dotyczących poziomów czynnika B i kontrastach interakcji AxB była zawarta tylko w jednej z warstw (najlepiej w warstwie trzeciej). Jeżeli doświadczenia nie możemy zaplanować w taki sposób, wówczas kombinujemy informacje o danym kontraście na podstawie tych warstw, w których ten kontrast jest estymowalny. Przy kombinowaniu informacji można posłużyć się metodą podaną przez Bhattacharya (1978).

6. TESTOWANIE HIPOTEZ

W pracy założyliśmy, że składniki losowe modelu podlegają rozkładowi normalnym. Założenie to zezwala na stosowanie teorii testowania hipotez w tzw. modelach normalnych. Pomijając wszystkie szczegółowe wyprowadzenia (Mejza I., 1984) ostatecznie testowanie hipotez oprócz możemy na tabeli analizy wariancji (Tabela 6.1). Zauważmy z Tabeli 6.1, że w t -tej warstwie testowalna jest hipoteza $H_{Ot}: C_t'r = 0$. Test dla tej hipotezy jest oparty na funkcji testowej $F_t = \text{MST}_t / \text{MSE}_t$, która przy prawdziwości hipotezy H_{Ot} podlega centralnemu rozkładowi F , z ν_{Tt} i ν_{Et} stopniami swobody ($t=1,2,3$).

Hipoteza H_{Ot} nie jest jednak najczęściej hipotezą badacza. Zależy ona bezpośrednio od planu doświadczenia. Hipotezę badacza notujemy jako

Tabela 6.1. Tabela analizy wariancji

Źródło zmienności	Stopnie swobody	Sumy kwadratów	Średnie kwadraty	Wartości oczekiwane średnich kwadratów
Analiza bloków				
Obiekty 1	$\nu_{T1} = r(C_1)$	SST_1	MST_1	$\gamma_1 + \nu_{T1}^{-1} \mathbf{r}' C_1 \bar{\mathbf{r}}$
Błąd 1	ν_{E1}	SSE_1	MSE_1	γ_1
Całość 1 (bloki)	$\nu_1 = b-1$	SSY_1		$\gamma_1 + \nu_1^{-1} \mathbf{r}' C_1 \bar{\mathbf{r}}$
Analiza poletek dużych				
Obiekty 2	$\nu_{T2} = r(C_2)$	SST_2	MST_2	$\gamma_2 + \nu_{T2}^{-1} \mathbf{r}' C_2 \bar{\mathbf{r}}$
Błąd 2	ν_{E2}	SSE_2	MSE_2	γ_2
Całość 2 (duże poletka)	$\nu_2 = b(S-1)$	SSY_2		$\gamma_2 + \nu_2^{-1} \mathbf{r}' C_2 \bar{\mathbf{r}}$
Analiza poletek małych				
Obiekty 3	$\nu_{T3} = r(C_3)$	SST_3	MST_3	$\gamma_3 + \nu_{T3}^{-1} \mathbf{r}' C_3 \bar{\mathbf{r}}$
Błąd 3	ν_{E3}	SSE_3	MSE_3	γ_3
Całość 3 (małe poletka)	$\nu_3 = n-bS$	SSY_3		$\gamma_3 + \nu_3^{-1} \mathbf{r}' C_3 \bar{\mathbf{r}}$

$H_{0,W} : W' \mathbf{r} = \mathbf{0}$, gdzie W jest macierzą rzędu g , której kolumnami są wektory wyznaczające kontrasty interesujące badacza. W pierwszym etapie sprawdzamy, czy hipoteza ta jest testowalna w t -tej warstwie, tzn. czy funkcje $W' \mathbf{r}$ są estymowalne w t -tej warstwie ($t=1,2,3$). Estymowalność sprawdzamy za pomocą warunku $W' C_t \bar{C}_t = W'$. Jeśli warunek ten jest spełniony, to hipotezę $H_{0,W} : W' \mathbf{r} = \mathbf{0}$ testujemy w t -tej warstwie za pomocą funkcji testowej $F_W = SS_W / (g \text{ MSE}_t)$, która przy prawdziwości $H_{0,W}$ podlega centralnemu rozkładowi F z g i ν_{Et} stopniami swobody, gdzie $SS_W = Q_t' C_t W (W' C_t \bar{C}_t W)^{-1} W' C_t \bar{C}_t$. Hipoteza $H_{0,W}$ dotyczy może efektów poziomów czynnika A, efektów poziomów czynnika B oraz efektów interakcyjnych (w zależności od postaci macierzy W).

Do obliczeń niektórych sum kwadratów wykorzystać możemy wartości własne (5.3). Na przykład mamy (Mejza I., 1984)

$$SST_t = \sum_{\substack{i \\ \epsilon_{it} \neq 0}} \epsilon_{it} (\hat{\mathbf{c}}_i' \mathbf{r}_t)^2, \quad t=1,2,3.$$

Zauważmy także, że jeśli tylko kontrast bazowy $\mathbf{c}_i' \mathbf{r}$ jest estymowalny w t -tej warstwie, to łatwo podać test dla hipotezy $H_{0i} : \mathbf{c}_i' \mathbf{r} = 0$ w tej warstwie. Test ten oparty jest na funkcji testowej postaci $F_{ti} = \epsilon_{it} (\hat{\mathbf{c}}_i' \mathbf{r})^2 / \text{MSE}_t$, która przy prawdziwości hipotezy H_{0i} podlega centralnemu rozkładowi F z 1 i ν_{Et} stopniami swobody ($t=1,2,3$).

Jeżeli zdarzy się sytuacja, że hipoteza $H_{0,W}$ lub H_{0i} jest testowalna w kilku warstwach, to podobnie jak przy estymacji, można wykorzystać metody kombinowania testów. Jedną z nich podaje Fisher (1954).

7. PLANOWANIE

Planowanie doświadczeń w układzie rozważanym w pracy związane jest z wyborem odpowiedniego planu teoretycznego D określającego z góry, które z badanych poziomów czynnika B występują w obrębie każdego poziomu czynnika A na poletkach dużych. W planie tym można uwzględnić różne sugestie badacza dotyczące na przykład efektywności badanych kontrastów kombinacji obiektowych. W zagadnieniu tym zastosowanie mają powszechnie znane plany teoretyczne dla układów blokowych.

Zauważmy, że macierze incydencji N_1 i N_2 (zob.(5.1)) możemy przedstawić w postaci

$$N_1 = [\tilde{N}'_1, \tilde{N}'_2, \dots, \tilde{N}'_S]', \quad N_2 = \text{diag}[\tilde{N}_1, \tilde{N}_2, \dots, \tilde{N}_S],$$

gdzie \tilde{N}_h oznacza macierz incydencji opisującą rozmieszczenie poziomów czynnika B wewnątrz h -tego poziomu czynnika A . Powyższy zapis implikuje następującą postać macierzy $F_3 = \text{diag}[\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \dots, \tilde{F}_S]$, gdzie

$$\tilde{F}_h = I_T - k^{-1} r^{-\frac{1}{2}} \delta_{h,h}^{-\frac{1}{2}} (\tilde{N}_h N_h' r_h)^{-\frac{1}{2}} \delta_{h,h}^{-\frac{1}{2}}, \quad (7.1)$$

a r_h oznacza wektor replikacji poziomów czynnika B w obrębie h -tego poziomu czynnika A ($h=1, 2, \dots, S$).

Wymagane w pracy ograniczenie dotyczące wspólnego zbioru wektorów własnych dla macierzy F_1, F_2 i F_3 jest spełnione, jeżeli wszystkie macierze \tilde{N}_h ($h=1, 2, \dots, S$) są jednakowe. Przy niejednakowych \tilde{N}_h należy sprawdzić równość $F_2 F_3 = F_3 F_2$. Jeżeli jest ona spełniona to wtedy istnieje wspólny zbiór wektorów charakterystycznych i można stosować wzory podane w tej pracy. Ponadto, gdy \tilde{N}_h będą macierzami incydencji odpowiedniego układu C (Ceranka, 1983), to doświadczenie można tak zaplanować, aby kontrasty najbardziej interesujące badacza były estymowalne z pełną efektywnością.

Powyższe rozważania ilustrujemy przykładami.

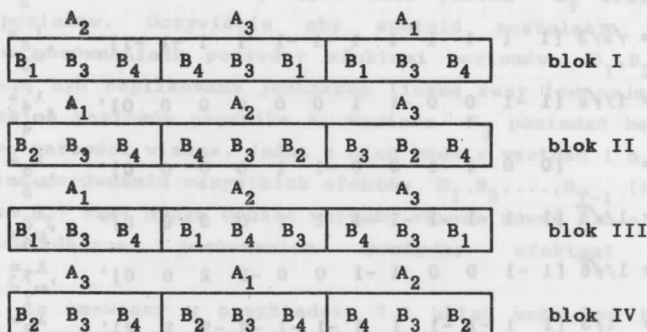
Przykład 7.1. Rozważmy doświadczenie, w którym czynnik A występuje na trzech poziomach ($S=3$), a czynnik B na czterech poziomach ($T=4$). Dysponujemy poletkami o pojemności $k=3$ poletka małe.

Przypuśćmy, że ze względu na zagadnienie badawcze jesteśmy zainteresowani w porównaniu efektu poziomu B_3 z efektem poziomu B_4 z pełną efektywnością, oraz efektów poziomów B_1 i B_2 z efektami poziomów B_3 i B_4 również z pełną efektywnością, w obrębie wszystkich poziomów A_h ($h=1, 2, 3$). Postulat ten zostanie spełniony, jeśli poziomy B_1, B_2, B_3 i B_4 zostaną rozmieszczone w obrębie każdego A_h według planu określonego przez macierz

incydencji układu typu C postaci

$$\tilde{M}_h = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad h = 1, 2, 3.$$

Macierze te wyznaczają niekompletny układ split-plot, którego przykładowy schemat uzyskany po rozlosowaniu (plan doświadczenia) przedstawia rysunek 7.1.



Rys. 7.1. Plan doświadczenia

Zauważmy, że macierz incydencji \tilde{M}_h narzuca z góry liczbę bloków, równą czterem (lub wielokrotność czterech) oraz to, które z poziomów B_j ($j=1,2,3,4$) mają wystąpić na poszczególnych poletkach dużych. Dla tego układu mamy

$$F_2 = \begin{bmatrix} \tilde{F} & L & L \\ L & \tilde{F} & L \\ L & L & \tilde{F} \end{bmatrix}, \quad F_3 = \text{diag} [\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \tilde{F}_3],$$

gdzie

$$\tilde{F}_h = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & 0 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 4 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 4 & -2 \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad h = 1, 2, 3.$$

$$\tilde{F} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 16 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 16 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 16 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & 16 \end{bmatrix}, \quad L = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ macierze \tilde{M}_h ($h = 1, 2, 3$) są jednakowe, więc istnieje wspólny zbiór wektorów własnych p_1, p_2, \dots, p_{12} macierzy F_2 i F_3 . Wektory te służą do obliczania wektorów $c_i = r^{(1/2)} \delta_{p_i}$, które wyznaczają kontrasty

(bazowe) $c_i'r$ ($i = 1, 2, \dots, 11$). W przykładzie tym wektor replikacji kombinacji obiektowych jest postaci $r' = [2, 2, 4, 4, 2, 2, 4, 4, 2, 2, 4, 4]'$. Jednym z możliwych układów wektorów c_i wyznaczających kontrasty bazowe $c_i'r$ jest poniższy, przedstawiony wraz z wartościami własnymi macierzy F_3 i F_2 odpowiadającymi poszczególnym wektorom.

$$\begin{array}{ll}
 c_1 = 1/\sqrt{3} [1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0]' & \lambda_1 = 2/3, \\
 & & & & & & & & & & & & \omega_1 = 2/3, \\
 c_2 = 2/\sqrt{6} [0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1]' & \lambda_2 = 1, \\
 & & & & & & & & & & & & \omega_2 = 1, \\
 c_3 = \sqrt{2}/3 [1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1]' & \lambda_3 = 1, \\
 & & & & & & & & & & & & \omega_3 = 1, \\
 c_4 = 1/\sqrt{2} [1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0]' & \lambda_4 = 2/3, \\
 & & & & & & & & & & & & \omega_4 = 1, \\
 c_5 = & [0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0]' & \lambda_5 = 1, \\
 & & & & & & & & & & & & \omega_5 = 1, \\
 c_6 = 1/\sqrt{3} [1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0]' & \lambda_6 = 1, \\
 & & & & & & & & & & & & \omega_6 = 1, \\
 c_7 = 1/\sqrt{6} [1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0]' & \lambda_7 = 2/3, \\
 & & & & & & & & & & & & \omega_7 = 1, \\
 c_8 = 1/3 [1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -2 & -2 & 2 & 2]' & \lambda_8 = 1, \\
 & & & & & & & & & & & & \omega_8 = 1, \\
 c_9 = 1/\sqrt{3} [0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -2 & 2]' & \lambda_9 = 1, \\
 & & & & & & & & & & & & \omega_9 = 1.
 \end{array}$$

Z postaci wektorów c_i i odpowiadających im wartości własnych wynika, że kontrast $c_2'r$ między efektem głównym poziomu B_3 a efektem głównym B_4 jest estymowalny w warstwie trzeciej z pełną efektywnością ($\epsilon_{23}=1$).

Podobnie, kontrast $c_3'r$ między efektami głównymi poziomów B_1 i B_2 a efektami głównymi poziomów B_3 i B_4 jest estymowalny w warstwie trzeciej z pełną efektywnością. Natomiast kontrast $c_1'r$ między efektem głównym poziomu B_1 a efektem głównym poziomu B_2 jest estymowalny w warstwie trzeciej ze współczynnikiem efektywności $\epsilon_{13} = 2/3$ oraz w warstwie pierwszej ze współczynnikiem efektywności $\epsilon_{11} = 1/3$. Kontrasty $c_1'r$, $c_2'r$, $c_3'r$ dotyczą jedynie efektów głównych poziomów czynnika B, natomiast pozostałe z podanych kontrastów dotyczą efektów interakcyjnych. Nie podaliśmy tu kontrastów pomiędzy poziomami czynnika A, ponieważ do zilustrowania omawianych zagadnień nie było to konieczne. Kontrasty pomiędzy poziomami czynnika A są estymowalne w warstwie drugiej z pełną efektywnością. Przy użyciu powyższych kontrastów można przeprowadzić całą analizę wariancji (Mejza I., 1984).

Przykład 7.2. Inne zagadnienie, często spotykane w praktyce, występuje wtedy, gdy wśród poziomów B_j ($j = 1, 2, \dots, T$) jest jeden zwany wzorcem lub standardem. Niech B_T będzie takim poziomem. Celem eksperymentu jest wtedy przede wszystkim porównanie efektów głównych poziomów B_1, B_2, \dots, B_{T-1} (łącznie) z efektem głównym poziomu kontrolnego B_T . Uzasadnione jest więc wymaganie, aby kontrasty te estymowane były z pełną efektywnością. Poziomy

B_1, B_2, \dots, B_{T-1} traktujemy przy tym zwykle jednakowo i żądamy, aby wszystkie porównania pomiędzy ich efektami głównymi estymowane były z jednakową efektywnością. Żądania te zostaną spełnione jeśli macierz incydencji \tilde{N}_h będzie postaci

$$\tilde{N}_h = \begin{bmatrix} I_{T-1} & I_{T-1} & \dots \\ 1'_{T-1} & 1'_{T-1} & \dots \end{bmatrix} .$$

W praktyce oznacza to, że wystarczy założyć doświadczenie w blokach o wielkości 2, w których zawsze wystąpić musi poziom B_T oraz jeden z pozostałych poziomów. Oczywiście aby spełnić postulaty jednakowej efektywności w porównaniach pomiędzy efektami poziomów B_1, B_2, \dots, B_{T-1} poziomy te muszą być replikowane jednakową liczbę razy (co najmniej 2) w obrębie wszystkich poziomów czynnika A. Macierz F_3 posiadać będzie dwie różne niezerowe wartości własne. Jedną z nich będzie wartość 1 o krotności S (odpowiadająca porównaniu wszystkich efektów B_1, B_2, \dots, B_{T-1} (łącznie) z efektem poziomu B_T) oraz drugą będzie wartość własna równa 0.5 o krotności $S(T-2)$ (odpowiadająca porównaniom pomiędzy efektami poziomów B_1, B_2, \dots, B_{T-1}).

Zauważmy, że omawiany w przykładzie 7.1 układ może być traktowany jako układ doświadczalny z wzorcami (lub wzorcem zbiorowym), w którym rolę wzorców pełnią poziomy B_3 i B_4 .

8. PRZYKŁAD

W doświadczeniu badano wpływ trzech dawek nawozowych azotu (czynnik A) na plon kłębów dziewięciu średniopóźnych odmian ziemniaka (czynnik B). Dawki były następujące: A_1 - 50kgN/ha, A_2 - 100kgN/ha, A_3 - 150kgN/ha. Natomiast poziomy czynnika B reprezentowane były przez odmiany: B_1 - Sokół, B_2 - Sowa, B_3 - Kora, B_4 - Bryza, B_5 - Certa, B_6 - Leda, B_7 - Atol, B_8 - Kama, B_9 - Poprad. Doświadczenie założono w niekompletnym układzie split-plot zgodnie z następującą macierzą incydencji $\tilde{N}_1 = [N_1, N_2, N_3]$, gdzie

$$\tilde{N}_h = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \quad h=1,2,3, \quad (8.1)$$

jest 9x12-wymiarową macierzą incydencji układu BIB względem poletek dużych w obrębie h-tego poziomu czynnika A ($h = 1,2,3$).

Przykładowy schemat niekompletnego układu split-plot oraz plon kłębów ziemniaczanych z poletek małych przedstawia rysunek 8.1.

I	A ₁	A ₂	A ₃
B ₂ :29.0	B ₁ :21.0	B ₃ :29.2	B ₁ :27.2 B ₂ :33.0 B ₃ :22.0 B ₃ :42.0 B ₂ :35.4 B ₁ :28.0
II	A ₃	A ₂	A ₁
B ₄ :27.6	B ₅ :26.0	B ₆ :40.0	B ₆ :32.0 B ₄ :26.0 B ₅ :19.0 B ₅ :20.8 B ₄ :20.6 B ₆ :33.6
III	A ₂	A ₁	A ₃
B ₈ :28.8	B ₇ :31.0	B ₉ :29.0	B ₇ :29.2 B ₈ :30.0 B ₉ :24.0 B ₉ :20.8 B ₇ :29.0 B ₈ :31.0
IV	A ₃	A ₁	A ₂
B ₁ :29.2	B ₆ :36.0	B ₈ :30.2	B ₈ :25.2 B ₆ :25.6 B ₁ :25.0 B ₆ :35.4 B ₁ :26.0 B ₈ :34.0
V	A ₂	A ₁	A ₃
B ₄ :33.0	B ₂ :29.0	B ₉ :27.4	B ₂ :28.0 B ₉ :25.0 B ₄ :26.0 B ₂ :33.2 B ₄ :25.6 B ₉ :26.0
VI	A ₃	A ₂	A ₁
B ₃ :30.4	B ₅ :29.6	B ₇ :33.2	B ₇ :36.2 B ₅ :22.6 B ₃ :27.2 B ₃ :28.6 B ₅ :18.0 B ₇ :30.0
VII	A ₁	A ₂	A ₃
B ₇ :31.8	B ₁ :26.0	B ₄ :23.6	B ₁ :25.0 B ₄ :33.0 B ₇ :35.2 B ₁ :31.2 B ₄ :23.0 B ₇ :27.0
VIII	A ₃	A ₁	A ₂
B ₂ :30.0	B ₅ :25.6	B ₈ :32.6	B ₈ :30.0 B ₅ :18.4 B ₂ :34.6 B ₂ :31.0 B ₅ :20.0 B ₈ :27.0
IX	A ₂	A ₁	A ₃
B ₃ :25.0	B ₆ :30.0	B ₉ :29.0	B ₉ :23.0 B ₆ :31.0 B ₃ :32.0 B ₃ :29.0 B ₆ :36.0 B ₉ :23.6
X	A ₁	A ₂	A ₃
B ₉ :30.0	B ₅ :18.0	B ₁ :26.0	B ₁ :26.2 B ₅ :23.0 B ₉ :29.0 B ₁ :31.0 B ₅ :23.2 B ₉ :29.0
XI	A ₃	A ₁	A ₂
B ₂ :35.0	B ₇ :33.0	B ₆ :34.0	B ₆ :29.6 B ₇ :30.0 B ₂ :26.0 B ₂ :33.2 B ₇ :31.0 B ₆ :35.0
XII	A ₂	A ₁	A ₃
B ₄ :27.0	B ₃ :20.0	B ₈ :26.0	B ₃ :25.0 B ₄ :26.0 B ₈ :30.8 B ₈ :36.8 B ₄ :26.0 B ₃ :28.5

Rys. 8.1. Przykładowy schemat układu oraz plony kłębow ziemniaczanych z poletka małego

W doświadczeniu tym sprawdzamy następujące hipotezy ogólne:

$$H_{OA}: \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0, \quad H_{OB}: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_9 = 0, \quad (8.2)$$

$$H_{OAxB}: (\alpha\beta)_{11} = (\alpha\beta)_{12} = \dots = (\alpha\beta)_{39} = 0.$$

Analiza tego eksperymentu oparta jest na wartościach własnych i wektorach własnych macierzy F_2 i F_3 postaci

$$F_2 = (1/36) \begin{bmatrix} F^* & L & L \\ L & F^* & L \\ L & L & F^* \end{bmatrix}, \quad F^* = 33 I_9 - 1_9 1_9', \quad L = (-3) I_9 - 1_9 1_9', \quad (8.3)$$

$$F_3 = \text{diag}[\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \tilde{F}_3], \quad \tilde{F}_h = (3/4)I_9 - (1/12)1_91_9', \quad h=1,2,3 \quad (8.4)$$

Dla macierzy F_2 i F_3 zbudujemy wspólny układ wektorów własnych p_i , za pomocą których wyznaczmy kontrasty bazowe $c_i'r$. Niech

$\tilde{p}_1 = 1/\sqrt{2} [1 \ -1 \ 0]'$, $\tilde{p}_2 = 1/\sqrt{6} [1 \ 1 \ -2]'$, $\tilde{p}_3 = 1/\sqrt{3} [1 \ 1 \ 1]'$, będą wzajemnie ortonormalnymi wektorami pomiędzy poziomami czynnika A. oraz niech

$$q_1 = 1/\sqrt{2} [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 -1],$$

$$q_2 = 1/\sqrt{6} [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ -1 \ -1],$$

$$q_3 = 1/\sqrt{12} [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 3 \ -1 \ -1 -1],$$

$$q_4 = 1/\sqrt{20} [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 4 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 -1],$$

$$q_5 = 1/\sqrt{30} [0 \ 0 \ 0 \ 5 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 -1],$$

$$q_6 = 1/\sqrt{42} [0 \ 0 \ 6 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 -1],$$

$$q_7 = 1/\sqrt{56} [0 \ 7 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 -1],$$

$$q_8 = 1/\sqrt{72} [8 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 -1],$$

$$q_9 = 1/3 [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 1],$$

będą wzajemnie ortonormalnymi wektorami pomiędzy poziomami czynnika B. Wówczas wektory $p_i = \tilde{p}_h \otimes q_j$, gdzie $i = (h-1)9 + j$, $h = 1,2,3$, $j = 1,2,\dots,9$ są wspólnymi wektorami własnymi macierzy (8.3) i (8.4). Wektory te posłużą do wyznaczenia ocen kontrastów bazowych $c_i'r$, gdzie $c_i = 2p_i$. Do przeprowadzenia analizy wariancji potrzebne są oceny kontrastów bazowych $c_i'r$. Oceny te oraz odpowiadające im wartości własne ϵ_{it} ($t=1,2,3$), odpowiednio macierzy $F_1 - F_2$, $F_2 - F_3$ i F_3 , jako miary informacji o kontrastach w danej warstwie przedstawia Tabela 8.1. Ze struktury wektorów c_i wiadomo, że kontrasty o numerach 9 i 18 dotyczą efektów poziomów czynnika A. W rozważanym układzie są one estymowalne z pełną efektywnością w warstwie drugiej ($\epsilon_{i2} = 1$, $i = 9,18$). Kontrasty o numerach 19-26 dotyczą efektów poziomów czynnika B i są estymowalne w warstwach pierwszej i trzeciej. Na podstawie wartości własnych $\epsilon_{i1} = 0,25$ i $\epsilon_{i3} = 0,75$, $i = 19,\dots,26$, zauważamy, że większa część informacji o tych kontrastach jest zawarta w warstwie trzeciej. Pozostałe kontrasty (patrz Tabela 8.1), dotyczące efektów interakcyjnych są estymowalne w warstwach drugiej i trzeciej (z większą efektywnością w warstwie trzeciej; $\epsilon_{i2} = 0,25$, $\epsilon_{i3} = 0,75$). Tabela 8.2 jest tabelą analizy wariancji dla rozważanego doświadczenia. Obliczone ilorazy F w Tabeli 8.2 umożliwiają zweryfikowanie hipotez ogólnych (8.2). Hipotezę H_{OA} odrzucamy, gdyż $F_{0,01;2;6} = 10,92 < 13,09$. Hipotezę H_{OB} można zweryfikować za pomocą funkcji testowych F_1 i F_3 , ponieważ ta hipoteza jest testowalna w warstwie pierwszej i warstwie trzeciej. Wynika to stąd, że wszystkie kontrasty dotyczące efektów poziomów czynnika B są estymowalne w warstwie pierwszej i trzeciej. Przy testowaniu ograniczymy się do warstwy trzeciej,

Tabela 8.1. Tabela ocen kontrastów bazowych i odpowiadających im współczynników efektywności odpowiednio w warstwie pierwszej, drugiej i trzeciej

Nr	Ocena		Ocena		Ocena	
	\hat{c}_{i1}	ϵ_{i1}	\hat{c}_{i2}	ϵ_{i2}	\hat{c}_{i3}	ϵ_{i3}
1	-	0	-5.16	0.25	3.64	0.75
2	-	0	-9.85	0.25	0.74	0.75
3	-	0	-4.29	0.25	-0.45	0.75
4	-	0	6.22	0.25	-2.18	0.75
5	-	0	3.02	0.25	-6.86	0.75
6	-	0	8.58	0.25	11.14	0.75
7	-	0	-1.55	0.25	-0.23	0.75
8	-	0	-8.73	0.25	3.23	0.75
9	-	0	-7.45	1	-	0
10	-	0	-7.74	0.25	-6.58	0.75
11	-	0	2.64	0.25	2.72	0.75
12	-	0	-12.35	0.25	-5.07	0.75
13	-	0	-11.34	0.25	-5.58	0.75
14	-	0	-0.21	0.25	7.27	0.75
15	-	0	-14.30	0.25	-4.66	0.75
16	-	0	-6.14	0.25	-0.86	0.75
17	-	0	-2.12	0.25	-3.68	0.75
18	-	0	-12.99	1	-	0
19	3.40	0.25	-	0	11.19	0.75
20	13.80	0.25	-	0	7.29	0.75
21	12.08	0.25	-	0	11.57	0.75
22	-15.28	0.25	-	0	-28.95	0.75
23	-7.36	0.25	-	0	-6.67	0.75
24	3.24	0.25	-	0	-1.13	0.75
25	13.20	0.25	-	0	9.44	0.75
26	0.24	0.25	-	0	-8.06	0.75

gdyż w niej powyższe kontrasty są estymowalne z większą precyzją. Precyzję mierzymy zwykle jako odwrotność wariancji estymatora kontrastu (w danej warstwie). Ocena precyzji każdego kontrastu bazowego estymowanego w warstwie trzeciej wynosi $0,75/7,6 = 0,099$, natomiast w warstwie pierwszej wynosi $0,25/10,84 = 0,023$. Zatem hipotezę H_{OB} odrzucamy, gdyż $F_{0,01;8;48} = 2,9 < 16,67$.

Podobnie, hipoteza H_{OAxB} jest testowalna w analizie poletek dużych i poletek małych, ponieważ wszystkie kontrasty dotyczące efektów interakcyjnych są estymowalne w warstwie drugiej i trzeciej. Wybieramy warstwę trzecią z tych samych powodów co wyżej. A zatem hipotezę H_{OAxB} odrzucamy, gdyż $F_{0,01;16;48} = 2,40 < 2,44$.

Tabela 8.2. Analiza wariancji

Źródła zmienności	Stopnie swobody	Sumy kwadratów	Srednie kwadraty	Ilorazy F
Analiza bloków				
Obiekty 1	8	205,09	25,74	2,37
Błąd 1	3	32,54	10,84	
Całość 1	11	237,63		
Analiza poletek dużych				
Obiekty 2	18	459,64		
w tym:				
Czynnik A	2	224,39	112,2	13,09
Reszta 2	16	235,25	14,7	1,71
Błąd 2	6	51,42	8,57	
Całość 2	24	511,06		
Analiza poletek małych				
Obiekty 3	24	1310,30		
w tym:				
Czynnik B	8	1013,33	126,67	16,67
Interakcja AxB	16	296,97	18,56	2,44
Błąd 3	48	364,72	7,60	
Całość 3	72	1675,02		

Do weryfikacji hipotez H_{OB} i H_{OAxB} można również użyć jedną z metod kombinowania testów.

Odrzucenie hipotez ogólnych pozwala nam na sformułowanie wniosków:

- nie wszystkie prawdziwe średnie plony uzyskane przy badanych dawkach są jednakowe,
- nie wszystkie prawdziwe średnie plony uzyskane dla badanych odmian są jednakowe,
- wpływy badanych dawek i badanych odmian na prawdziwe średnie plony nie są niezależne (wykazują interakcję).

Estymatory kontrastów bazowych, $c'_t \hat{r}_t$ $t = 1, 2, 3$ wykorzystać można również do wnioskowania dotyczącego hipotez szczegółowych. Na przykład hipoteza $H_{0,9}: c'_9 \hat{r} = 0$ ($H_{1,9}: c'_9 \hat{r} \neq 0$) jest hipotezą orzekającą, że średni plon kłębów ziemniaczanych uzyskany przy nawożeniu $A_1 = 50 \text{ kgN/ha}$ jest taki sam jak średni plon kłębów ziemniaczanych uzyskany przy nawożeniu $A_2 = 100 \text{ kgN/ha}$. Hipotezę $H_{0,9}$ weryfikujemy za pomocą $F_{2,9} = 6,49 > 5,99 = F_{0,05;1;6}$. Zatem hipotezę tę odrzucamy na korzyść hipotezy alternatywnej. Podobnie można weryfikować hipotezy szczegółowe dotyczące pozostałych kontrastów bazowych.

LITERATURA

- Bhattacharya C.G. (1978). A note on estimating the common mean of K -normal populations. *Sankhya* 40, B, 272-275.
- Bailey R.A. (1981). A unified approach to design of experiments. *J.R. Statistic. Soc. A* 144, 214-223.
- Ceranka B. (1983). Planning of experiments in C-designs. *Ann. Pozn. Agricult. Univ. Sc. Diss.* 136.
- Fisher R.A. (1954). *Statistical Methods for Research Workers*. Oliver and Boyd, London.
- Houtman A.M., Speed T.P. (1983). Balance in designed experiments with orthogonal block structure. *Ann. Statist.* 11, 1069-1085.
- Mejza I. (1981). Analiza doświadczenia o jednostkach pojedynczo rozszczepionych w układzie bloków niekompletnych. *Roczniki Akademii Rolniczej w Poznaniu. Seria Alg. Biom. i Stat.* 10, 37-51.
- Mejza I., Mejza S. (1981). Analiza niekompletnych pojedynczo rozszczepionych jednostek. *Jedenaste Colloquium Metodologiczne z Agrobiometrii*, PAN i PTB, Warszawa, 92-108.
- Mejza I., Mejza S. (1984). Incomplete split-plot designs. *Statistics and Probability Letters* 2, 327-332.
- Mejza I. (1984). *Planowanie i analiza doświadczeń dwuczynnikowych zakładanych w niekompletnym układzie split-plot*. Praca doktorska, maszynopis, Biblioteka Główna Akademii Rolniczej, Poznań.
- Mejza I. (1985). Modelowanie analizy wariancji dla doświadczeń zakładanych w niekompletnym układzie split-plot. *Piętnaste Colloquium Metodologiczne z Agrobiometrii*, PAN i PTB, Warszawa, 73-84.
- Nelder J.A. (1965). The analysis of randomized experiments with orthogonal block structure. *Proc. R. Soc. A* 283, 147-162, 163-178.
- Rao C.R., Mitra S.K. (1971). *Generalized Inverse of Matrices and its Applications*. New York: Wiley.
- Robinson J. (1967). Incomplete split-plot designs. *Biometrics* 23, 793-802.

Praca wpłynęła 5 czerwca 1988;
w wersji ostatecznej 2 maja 1989

THE ANALYSIS OF TWO-FACTOR EXPERIMENTS
CARRIED OUT IN INCOMPLETE SPLIT-PLOT DESIGN

Summary

The paper presents the analysis of two-factor experiments carried out in an incomplete split-plot design. The incomplete split-plot design considered is the design in which whole-plot treatments occur in a randomized block design but the subplot treatments occur in an incomplete design; that is, the number of subplots in whole plots may be less than the number of subplot treatments.

Key words: split-plot design, incomplete split-plot design, linear model, contrasts of treatments: combinations, planning of experiments